1 Колебания

Колебания независимо от их природы (механические, электромагнитные и т.д.) представляют собой периодический процесс выхода объекта или системы из состояния равновесия и возврата в это состояние. При этом процессе происходит трансформация энергии из одного вида в другой (кинетической в потенциальную и наоборот при механических колебаниях, электрической в магнитную и наоборот при электромагнитных колебаниях и т.д.).

Точка в колебательном процессе, в которой заканчивается выход системы из состояния равновесия и начинается возврат в это состояние, называется точкой поворота. В точке, соответствующей состоянию равновесия, и в точках поворота один из видов энергии, присутствующих в данном колебательном процессе, всегда равен нулю.

1.1 Основные характеристики колебательных процессов

1. Амплитуда (A) – это максимально возможное смещение от положения равновесия в данном процессе.
2. Частота (ν) – это количество колебаний за единицу времени. Измеряется в герцах. (1 Гц – 1 колебание за 1 секунду). Круговая или циклическая частота (ω). $\omega = 2\pi\nu$.
3. Период (T)– время 1 полного колебания. $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$.

1.2 Гармонические колебания

Колебания, в которых зависимость смещения из положения равновесия от времени описывается функциями синуса или косинуса, называются *гармоническими.* Любое негармоническое (ангармоническое) колебание можно всегда представить с помощью соответствующего набора гармонических колебаний.

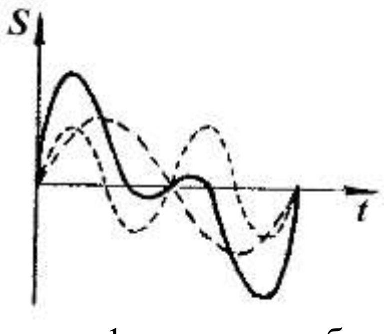


Рисунок 1 – виды колебаний

Аналитически гармонические колебание имеют вид:

$$\tilde{o} = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin(2\pi\nu t + \varphi_0) = A\sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0) \text{ èëè}$$

$$\tilde{o} = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = A\cos(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0), \qquad (1.1)$$

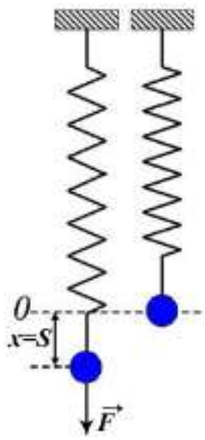
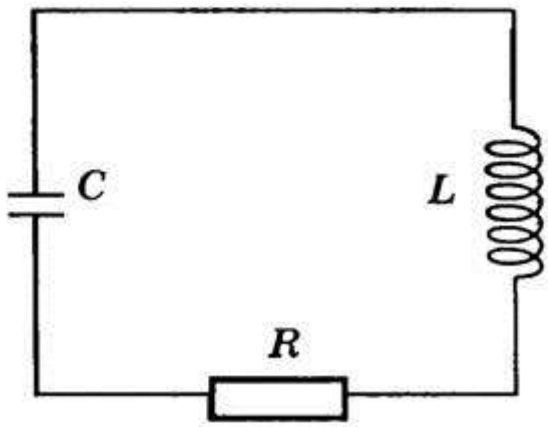
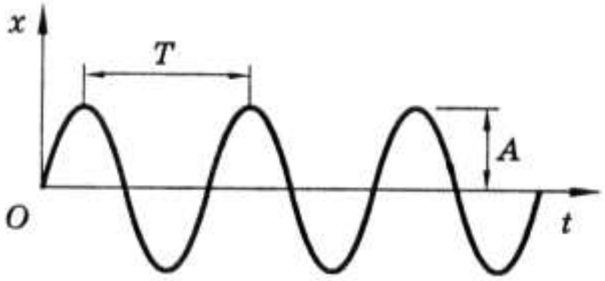
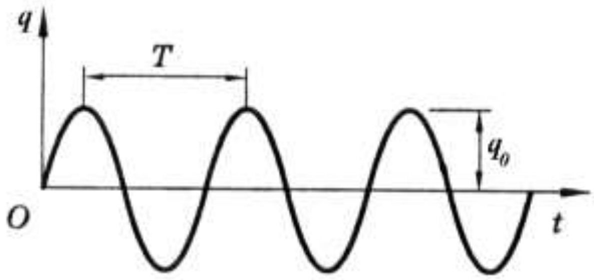
где x – смещение от положения равновесия, φ_0 - начальная фаза.

1.3 Гармонический осциллятор

Гармонический осциллятор – это колебательная система, в которой в любой момент времени ее потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения от положения равновесия *($W_n \sim x^2$)*. Гармоническим осциллятором может считаться только система, совершающая *малые колебания*. Колебания любой системы могут считаться малыми до тех пор, пока их амплитуда намного меньше тех значений амплитуд, которые, в принципе, возможны в данной системе. Например, для математического маятника амплитуда малых колебаний значительно меньше длины нити.

1.4 Таблица аналогий для механических и электромагнитных колебательных систем

Таблица 1

<table>
<tr><th>Механическая система
(пружинный маятник)</th><th>Электромагнитная система
(колебательный контур)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$x = A\sin\omega t$

</td><td>$q = q_0 \sin \omega t$

</td></tr>
</table>

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$	$I = \dfrac{dq}{dt} = q_0\omega\cos\omega t$
$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$	$\dfrac{d^2q}{dt^2} = -q_0\omega^2\sin\omega t$
$W_п = \dfrac{kx^2}{2}$	$W_э = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{CU^2}{2}$
$W_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	$W_м = \dfrac{LI^2}{2}$

1.5 Классификация колебаний

В зависимости от характера взаимодействия колебательной системы с окружающей средой колебания могут быть свободными и вынужденными. Вынужденными называются колебания, происходящие в результате внешнего периодического воздействия на систему.

Если внешнее воздействие равно нулю, то колебания являются свободными.

Свободные колебания, амплитуда которых уменьшается со временем, называются затухающими. Свободные колебания, амплитуда которых не зависит от времени (т.е. постоянная), являются незатухающими.

Частота, с которой система совершает свободные незатухающие колебания, называется частотой собственных колебаний или собственной частотой данной системы (ν_0 или $\omega_0 = 2\pi\nu_0$).

1.6 Уравнение свободных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\,, \qquad (1.2)$$

где x – смещение системы от положения равновесия;

δ – коэффициент затухания, характеризующий скорость уменьшения энергии при данном колебательном процессе.

ω_0 - собственная частота системы.

Таблица 2 - примеры значений ω_0 и δ для механического и электромагнитного гармонических осцилляторов

Пружинный маятник		**Колебательный контур**	
ω_0	δ	ω_0	δ
$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\dfrac{r}{2m}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\dfrac{R}{2L}$

Решение дифференциального уравнения (1.2):

$$S = Ae^{-\delta t}\cos\omega t\,. \qquad (1.3)$$

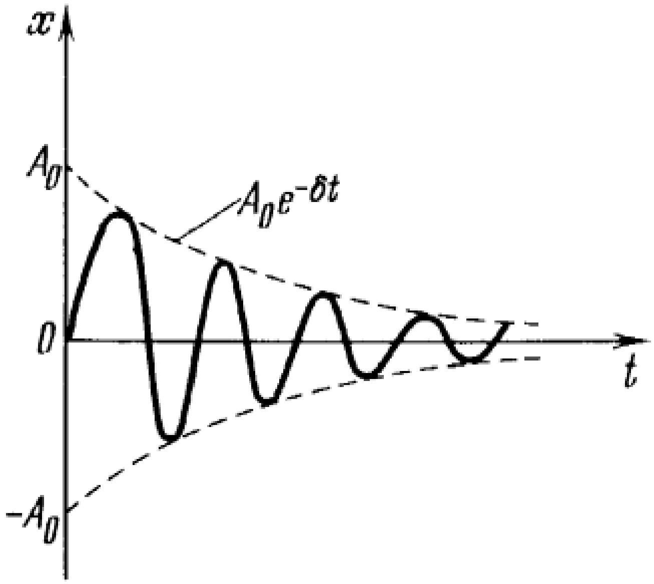


Рисунок 2 – свободные затухающие колебания

При $\delta = 0$ – колебания незатухающие, и $\omega = \omega_0$

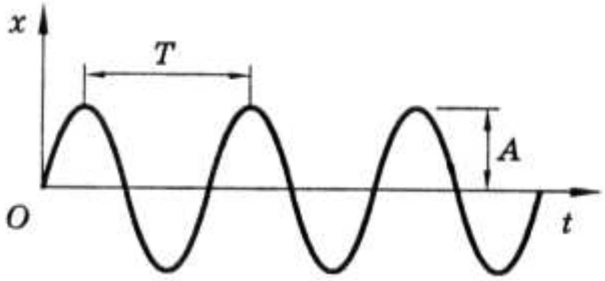


Рисунок 3 – незатухающие колебания

1.7 Добротность колебательной системы

Добротность (Q) – это важнейшая характеристика любой колебательной системы:

$$Q = 2\pi \frac{W_t}{W_t - W_{t+T}},$$

где W_t - энергия системы в момент времени *t*,

W_{t+T} - энергия системы через период T после момента времени *t*.

Так как добротность характеризует потери энергии в колебательных системах, то она, естественно, связана с коэффициентом затухания δ:

$$Q = \frac{\pi}{\delta T_0},$$

где T_0 - период собственных колебаний системы.

Понятием добротности удобно пользоваться для характеристики электромагнитных колебательных систем. Для характеристики механических колебательных систем чаще пользуются величиной, обратной добротности, которая называется «внутреннее трение»:

$$Q^{-1} = \frac{\delta T_0}{\pi}$$

Для характеристики потерь в колебательных системах также используется понятие «логарифмический декремент затухания Ω», который равен:

$$\Omega = \ln \frac{A_t}{A_{t+1}} = \delta T ,$$

где A_t - амплитуда затухающих колебаний в момент времени t,

A_{t+1} - следующая амплитуда колебаний.

1.8 Вынужденные колебания

Т.к. вынужденные колебания происходят в результате внешнего *периодического* воздействия, то, в отличие от дифференциального уравнения, описывающего свободные колебания, в уравнении для вынужденных колебаний должна появиться правая часть в виде периодической функции:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_0 \sin \omega t . \qquad (1.3)$$

1.9 Решение дифференциального уравнения

Для гармонического осциллятора:

$$x = A \sin \omega t . \qquad (1.4)$$

Механический маятник: $A = \dfrac{x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\delta^2 \omega^2}}; \quad x_0 = \dfrac{F_0}{m}.$

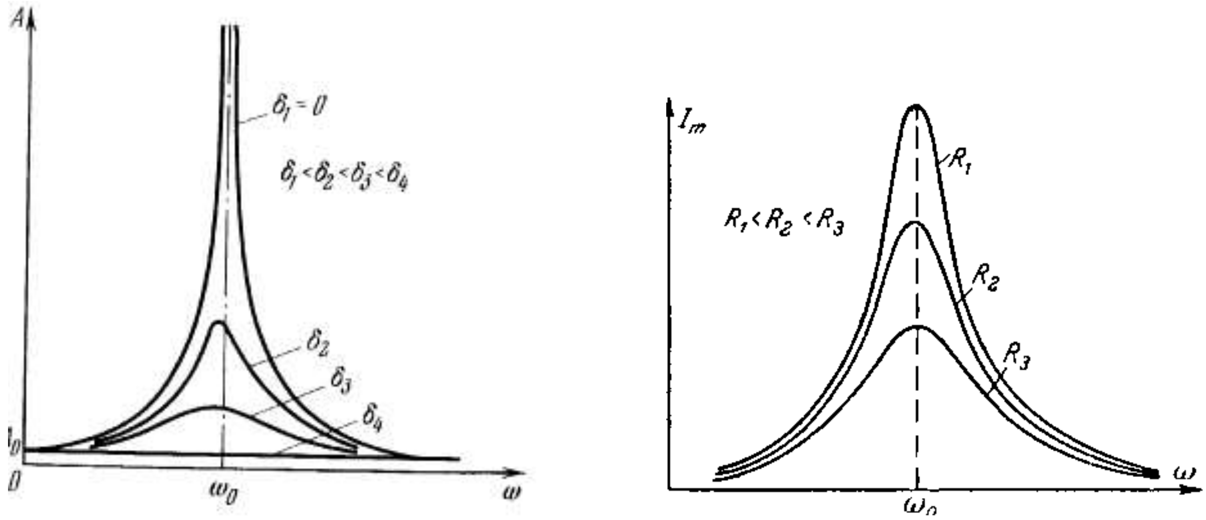
Колебательный контур: $q_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\delta^2 \omega^2}}; \quad x_0 = \dfrac{\xi_0}{m};$

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

1.10 Резонанс

Характер вынужденных колебаний существенно зависит от соотношения частоты внешнего периодического воздействия и собственной частоты колебательной системы.

При приближении значения частоты внешнего воздействия к значению собственной частоты колебательной системы амплитуды вынужденных колебаний в этой системе имеют тенденции к нарастанию и при совпадении значений собственной и вынужденной частоты амплитуды колебаний в системе могут достичь очень больших значений. Такое явление называется *резонансом*.



а) б)

Рисунок 4 – механический (а) и электрический (б) резонансы

Из формулы (4.6) можно определить резонансную частоту для колебательного контура. При резонансе амплитуда силы тока должна быть максимальной, а для этого нужно, чтобы общее сопротивление контура стало минимальным, т.е.

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0, \text{ отсюда } \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Или для периода $T_p = 2\pi\sqrt{LC}$.

Это формула У. Томсона.

1.11 Резонансные кривые, полоса пропускания.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия называется резонансной кривой. С помощью такой кривой можно, в частности, графически рассчитать величину добротности колебательной системы.

Область частот внешнего воздействия, при которых амплитуда вынужденных колебаний не меньше 0,7 от максимальной, называется полосой пропускания колебательной системы.

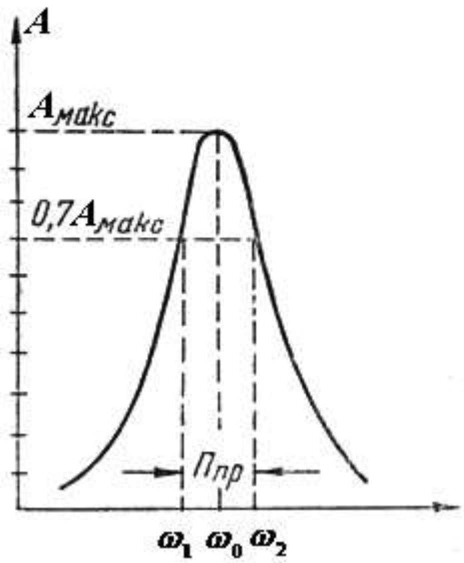


Рисунок 5 – полоса пропускания ($П_{пр}$)

Здесь ω_0 - резонансная частота, ω_1, ω_2 определяют границы полосы пропускания, а их разность называется *шириной полосы пропускания*. Добротность Q колебательной системы можно рассчитать по формуле

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Вопросы и задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой ***m*** подвешено на пружине, имеющей жесткость ***k***. Пружину разрезали пополам и к половине подвесили то же тело. Во сколько раз изменится частота колебаний.
2. Два тела с одинаковыми массами подвешены к двум одинаковым пружинам. Тела оттягиваются вниз, одно – на **0,1 м**, а второе – **на 0,2 м** и затем их одновременно отпускают. Какое из тел первым пройдет положение равновесия?
3. Запишите уравнение, описывающее движение пружины, если известно, что когда ее растягивают на **0,2 м** от положения равновесия и отпускают, она колеблется с периодом **1,5 с**? Определите смешение пружины при ***t* = 1,8 с**.
4. Смещение гармонического осциллятора в зависимости от времени дается выражением $x = 2{,}4\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$, где ***x*** измеряется в метрах, ***t*** – в секундах. Найти:
   а) период и частоту колебаний;
   б) смещение и скорость в момент времени ***t* = 0;**
   в) скорость и ускорение в момент времени ***t* = 1 с.**
5. При каком смещении гармонического осциллятора его кинетическая энергия равна потенциальной? Какую долю полной энергии составляет

кинетическая (потенциальная) энергия, когда смещение равно половине амплитуды?

6. Какую длину должен иметь математический маятник, чтобы его период был равен одной секунде?